Důkazy, indukce, kvantifikátory

3. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Dokažte, že $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

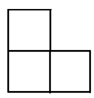
2. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí vztah
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

4. Dokažte, že pro každé $x > -1$ a pro každé přirozené n platí nerovnost
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

5. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ a pro $n > 2$ platí $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Najděte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti, a dokažte jeho správnost.

6. Mějme šachovnici s rozměry $2^n \times 2^n$, na které chybí pravé horní políčko. Dokažte, že se dá tato šachovnice vydláždit s pomocí dílků tohoto tvaru (dílky se mohou otáčet):



7. Dokažte, že pro $n \geq 4$ je počet uhlopříček konvexního n-úhleníka $\frac{1}{2}n(n-3)$.

8. Vyjádřete následující výroky pomocí kvantifikátorů:
   a) Každý zná každého.
   b) Někdo zná každého.
   c) Každý zná někoho.
   d) Někoho nikdo nezná.

9. Vyjádřete co nejjednodušeji:
   a) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall y \in \mathbb{R}$: $(|y - 7| < 5) \Rightarrow (|f(y) - 15| < \varepsilon)$
   b) $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists \delta > 1 \, \forall y \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$: $(|y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n})$

10. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. O f řekneme, že je **nerozhodná**, pokud je na nějakém otevřeném intervalu rostoucí a na nějakém otevřeném intervalu klesající. Zapište tuto definici pomocí kvantifikátorů.

$*$ 11. Znegujte následující výrok: „Každý si někdy rád dá jedno pivo, ale ne vždy a ne v každé hospodě.“